المحددات

سنربط في هذا الفصل كل مصفوفة مربعة A بعدد حقيقي يدعى محدد (أو معين) المصفوفة و الذي نرمز له بالرمز $|A|$ أو $Det(A)$ أو ΔA. فإذا كانت المصفوفة A معرفة بالشكل

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

عندئذٍ نكتب محدد المصفوفة A بالشكل

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

ملاحظة: إذا كانت المصفوفة المربعة A من المرتبة $n \times n$ فإننا نقول أن المحدد $|A|$ هو محدد من المرتبة n. و سنقدم فيما يلي طريقة حساب القيمة العددية لأي محدد.

حساب القيمة العددية لمحدد (طريقة تخفيض المرتبة):

تعريف: لتكن $A = \left(a_{i,j}\right)$ مصفوفة مربعة من المرتبة n، و لنرمز بالرمز $A_{i,j}$ للمصفوفة الناتجة عن المصفوفة A بعد حذف سطر و عمود العنصر $a_{i,j}$ منها. نسمي العدد الحقيقي $D_{i,j} = (-1)^{i+j} \left| A_{i,j} \right|$ المتمم الجبري للعنصر $a_{i,j}$ في المصفوفة A.

ملاحظة: لاحظ أنه يمكن الإستعاضة عن الحد $(-1)^{i+j}$ في عبارة المتمم الجبري بوضع إشارات $(+)$ أو $(-)$ بجانب كل عنصر من عناصر المصفوفة، حيث نبدأ بالعنصر $a_{1,1}$ و نضع إشارة $(+)$ بجانبه ثم تتناوب

الإشارة في العناصر المجاورة لهذا العنصر، و من ثم نأخذ الإشارة بعين الإعتبار بعد حساب قيمة المحدد $\left|A_{i,j}\right|$.

مثال: عين المتممات الجبرية لجميع عناصر المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

الحل: نضع الإشارات بجانب كل عنصر من عناصر المصفوفة كما يلي

$$\begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{5} & \overset{+}{-1} \\ \overset{-}{3} & \overset{+}{-4} & \overset{-}{0} \\ \overset{+}{-1} & \overset{-}{8} & \overset{+}{-1} \end{pmatrix}$$

و بالتالي نجد أن المتممات الجبرية لعناصر المصفوفة المعطاة هي

$$D_{1,1} = +\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} \quad , \quad D_{1,2} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \quad , \quad D_{1,3} = +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D_{2,1} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} \quad , \quad D_{2,2} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \quad , \quad D_{2,3} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D_{3,1} = +\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad D_{3,2} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad D_{3,3} = +\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

مبرهنة: لتكن $A = \left(a_{i,j}\right)$ مصفوفة مربعة من المرتبة $1 < n$، عندئذٍ يمكن حساب محدد هذه المصفوفة عن طريق نشر المحدد حسب أحد أعمدته أو أسطره بالشكل التالي

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot D_{i,j} \quad ; \quad \forall j$$ (نشر المحدد وفق أحد أعمدته)

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot D_{i,j} \quad ; \quad \forall i$$ (نشر المحدد وفق أحد أسطره)

أما إذا كانت $A = (a)$ مصفوفة مربعة من المرتبة الأولى (فيها سطر واحد و عمود واحد فقط أي أنها وحيدة العنصر)، فنعرف القيمة العددية لمحدد هذه المصفوفة بالعلاقة

$$Det(A) = a$$

أي أن محدد مصفوفة من المرتبة الأولى يساوي القيمة الجبرية لعنصر هذه المصفوفة.

ملاحظة: يمكن استخدام المبرهنة السابقة لحساب محدد مصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$ عن طريق تخفيض المرتبة بعد ملاحظة أن المحددات $D_{i,j}$ هي محددات من المرتبة $n-1$.

مثال (١): عين القيمة العددية لمحدد مصفوفة من المرتبة الثانية عن طريق تخفيض المرتبة؟

الحل: نفرض أن المصفوفة معرفة بالشكل

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

ننشر محدد هذه المصفوفة وفق عناصر سطره الأول (مثلاً) فنجد أن

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{1,1}\ Det(a_{2,2}) + (-1)^{1+2} a_{1,2}\ Det(a_{2,1})$$

$$= a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1}$$

و بالتالي فإن قيمة أي محدد من المرتبة الثانية و كما هو مبين في الشكل (١) يساوي حاصل جداء عناصر قطره الرئيسي مطروحاً منها حاصل جداء عناصر قطره الثانوي، أي أن

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a_{1,1}} & \overset{-}{a_{1,2}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times a_{2,2} - a_{1,2} \times a_{2,1}$$

الشكل (١)

مثال (٢): عين القيمة العددية لمحدد مصفوفة من المرتبة الثالثة عن طريق تخفيض المرتبة؟

الحل: نفرض أن المصفوفة معرفة بالشكل

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

ننشر هذا المحدد وفق عناصر العمود الثاني (مثلاً) فنجد

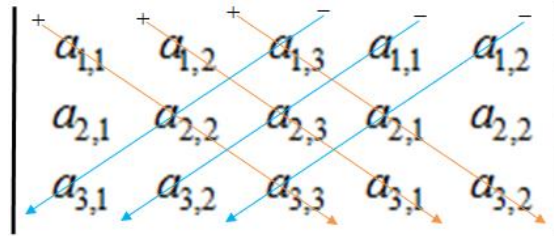
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+2} a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} a_{2,2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} a_{3,2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{1,2}\left(a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}\right) + a_{2,2}\left(a_{1,1} \cdot a_{3,3} - a_{1,3} \cdot a_{3,1}\right) - a_{3,2}\left(a_{1,1} \cdot a_{2,3} - a_{1,3} \cdot a_{2,1}\right)$$

$$= \left(a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2}\right) +$$
$$- \left(a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} + a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} + a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3}\right)$$

و بالتالي نستنتج الطريقة الهندسية المبينة في الشكل (٢) لحساب أي محدد من المرتبة الثالثة و الذي يدعى "مخطط ساروس"، حيث نقوم بتكرار العمودين الأول و الثاني من المحدد بعد العمود الثالث ثم نأخذ مجموع الجداءات الموازية للقطر الرئيسي بإشارات موجبة و الموازية للقطر الثانوي بإشارات سالبة.



الشكل (٢)

مثال (٣): أحسب محددات المصفوفات التالية

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 2b & a+b \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} Cos(\alpha) & Sin(\alpha) \\ -Sin(\alpha) & Cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} Sin(\theta) & 1 & 0 \\ 0 & Sin(\varphi) & -Cos(\theta) \\ Sin(\varphi) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل: باستخدام القواعد التي تم استنتاجها في المثالين السابقين من أجل محددات المرتبة الثانية و محددات المرتبة الثالثة نجد أن

$$Det(A)=\begin{vmatrix}3 & 6\\ -2 & 5\end{vmatrix}=3\times5-6\times(-2)=15+12=27$$

$$Det(B)=\begin{vmatrix}a+b & 2a\\ 2b & a+b\end{vmatrix}=(a+b)^2-4ab=a^2+2ab+b^2-4ab$$

$$=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$Det(C)=\begin{vmatrix}Cos(\alpha) & Sin(\alpha)\\ -Sin(\alpha) & Cos(\alpha)\end{vmatrix}=Cos^2(\alpha)-\left(-Sin^2(\alpha)\right)$$

$$=Cos^2(\alpha)+Sin^2(\alpha)=1$$

$$Det(D)=\begin{vmatrix}2 & -2 & 0 & 2 & -2\\ -3 & 1 & 2 & -3 & 1\\ 1 & -3 & -1 & 1 & -3\end{vmatrix}=-2-4+0-(-6-12-0)$$

$$=-6-(-18)=-6+18=12$$

$$Det(E)=\begin{vmatrix}Sin(\theta) & 1 & 0 & Sin(\theta) & 1\\ 0 & Sin(\varphi) & -Cos(\theta) & 0 & Sin(\varphi)\\ Sin(\varphi) & 0 & 1 & Sin(\varphi) & 0\end{vmatrix}$$

$$=Sin(\theta)Sin(\varphi)+\left(-Cos(\theta)Sin(\varphi)\right)+0-0-0-0$$

$$=\left(Sin(\theta)-Cos(\theta)\right)Sin(\varphi)$$

خواص المحددات:

١. محددة أي مصفوفة مثلثية عليا أو دنيا أو مصفوفة قطرية يساوي حاصل جداء عناصر القطر الرئيسي في هذه المصفوفة. و بالتالي فإن محدد أي مصفوفة صفرية مربعة يساوي الصفر.

٢. من أجل أي مصفوفة مربعة A يكون $|A^T|=|A|$، أي أنه لا تتغير قيمة محدد إذا بادلنا بين أسطره و أعمدته.

٣. من أجل أي مصفوفتين مربعتين A , B من نفس المرتبة يكون $|A\cdot B| = |A| \times |B|$.
٤. إذا بادلنا بين سطرين أو عمودين متتاليين في محدد تتغير إشارة المحدد و تبقى القيمة العددية له على حالها.
٥. لا تتغير قيمة المحدد بالتبديل الدوري بين أسطر (أو أعمدة) هذا المحدد.
٦. إذا ضربنا جميع عناصر سطر (أو عمود) في محدد بعدد ثابت فإن قيمة المحدد الناتج تساوي قيمة المحدد الأصلي مضروباً بهذا العدد.
٧. إذا تناسبت العناصر المتقابلة في سطرين (أو عمودين) مختلفين في محدد كانت قيمة هذا المحدد تساوي الصفر.
٨. إذا كتبنا جميع عناصر سطر (أو عمود) في محدد على شكل مجموع عنصرين، عندئذٍ يمكن كتابة هذا المحدد على شكل مجموع محددين من الشكل

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a'_{1,j}+a''_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a'_{2,j}+a''_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a'_{n,j}+a''_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a'_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a'_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a'_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a''_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a''_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a''_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

٩. لا تتغير قيمة المحدد إذا أضفنا إلى عناصر أي سطر (أو عمود) للعناصر المقابلة في أي سطر (أو عمود) آخر بعد ضرب جميع عناصر هذا السطر أو (العمود) بعددٍ ثابت.

ملاحظة: يمكن الاستفادة من الخواص السابقة في حساب قيم المحددات، و لذلك سنرمز للسطر رقم i بالرمز R_i و للعمود رقم j بالرمز C_j، و عندئذٍ سنستخدم التحويلات

١. $R_i \leftrightarrow R_j$ للتعبير عن عملية المبادلة بين السطرين R_i و R_j
٢. $C_i \leftrightarrow C_j$ للتعبير عن عملية المبادلة بين السطرين C_i و C_j
٣. $\lambda\cdot R_i + R_j$ للتعبير عن عملية استبدال السطر R_j بالقيمة $\lambda\cdot R_i + R_j$
٤. $\lambda\cdot C_i + C_j$ للتعبير عن عملية استبدال العمود C_j بالقيمة $\lambda\cdot C_i + C_j$

القسم العملي :

مثال (٤): أثبت صحة العلاقات التالية باستخدام خواص المحددات

1. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

2. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

3. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = ab+bc+ca+abc$

4. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

6. $\begin{vmatrix} -bc & b^2+bc & c^2+bc \\ a^2+ca & -ca & c^2+ca \\ a^2+ab & b^2+ab & -ab \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)^3$

الحل:

1. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

2. $$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix} \overset{\substack{R_1+R_2 \\ R_1+R_3}}{=} abc \begin{vmatrix} -a & b & c \\ 0 & 0 & 2c \\ 0 & 2b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= abc(-a)\begin{vmatrix} 0 & 2c \\ 2b & 0 \end{vmatrix} = abc(-a)(-4cb) = 4a^2b^2c^2$$

3. $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

و بحساب كل محدد من المحددين السابقين نجد أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} \overset{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = bc$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1+b & 1 \\ 1 & 1+c \end{vmatrix} = a\left[(1+b)(1+c)-1\right]$$

$$= a(b+c+bc) = ab+ac+abc$$

و بالتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أن

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = ab+bc+ca+abc$$

4. $$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} \overset{C_2+C_3+C_1}{=} \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & c+a & a+b \\ 2(p+q+r) & r+p & p+q \\ 2(x+y+z) & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ p+q+r & r+p & p+q \\ x+y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} \overset{\substack{-C_1+C_2 \\ -C_1+C_3}}{=} 2\begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ p+q+r & -q & -r \\ x+y+z & -y & -z \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_2+C_3+C_1}{=} 2\begin{vmatrix} a & -b & -c \\ p & -q & -r \\ x & -y & -z \end{vmatrix} = 2(-1)(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

5. $$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} \overset{\substack{-C_2+C_1 \\ -C_3+C_2}}{=} \begin{vmatrix} x-y & y-z & z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ yz-zx & zx-xy & xy \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & z \\ x+y & y+z & z^2 \\ -z & -x & xy \end{vmatrix}$$

$$\overset{-C_2+C_1}{=}(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & z \\ x-z & y+z & z^2 \\ x-z & -x & xy \end{vmatrix}$$

$$=-(x-y)(y-z)(z-x)\begin{vmatrix} 0 & 1 & z \\ 1 & y+z & z^2 \\ 1 & -x & xy \end{vmatrix}$$

$$\overset{-R_3+R_2}{=}-(x-y)(y-z)(z-x)\begin{vmatrix} 0 & 1 & z \\ 0 & x+y+z & z^2-xy \\ 1 & -x & xy \end{vmatrix}$$

$$=-(x-y)(y-z)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & z \\ x+y+z & z^2-xy \end{vmatrix}$$

$$=-(x-y)(y-z)(z-x)\left[z^2-xy-z(x+y+z)\right]$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)[xy+zx+yz]$$

6. $$\begin{vmatrix} -bc & b^2+bc & c^2+bc \\ a^2+ca & -ca & c^2+ca \\ a^2+ab & b^2+ab & -ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} -abc & ab^2+abc & a\,c^2+abc \\ ba^2+abc & -abc & bc^2+abc \\ ca^2+abc & cb^2+abc & -abc \end{vmatrix}$$

و ذلك بضرب السطر الأول و الثاني و الثالث بالمقادير a و b و c على الترتيب. و بإخراج a و b و c من العمود الأولى و الثاني و الثالث على الترتيب نجد

$$\begin{vmatrix} -bc & b^2+bc & c^2+bc \\ a^2+ca & -ca & c^2+ca \\ a^2+ab & b^2+ab & -ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -bc & ab+ca & ca+ab \\ ba+bc & -ca & bc+ab \\ ca+bc & cb+ca & -ab \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2+R_3+R_1}{=} \begin{vmatrix} ab+bc+ca & ab+bc+ca & ab+bc+ca \\ ba+bc & -ca & bc+ab \\ ca+bc & cb+ca & -ab \end{vmatrix}$$

$$=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ba+bc & -ca & bc+ab \\ ca+bc & cb+ca & -ab \end{vmatrix}$$

$$=-(ab+bc+ca)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ cb+ca & -ab \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)^2\begin{vmatrix} cb+ca & -ab \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(ab+bc+ca)^2(ab+bc+ca)=(ab+bc+ca)^3$$

تمارين غير محلولة (المحددات)

١. أحسب قيم المحددات التالية

(i) $\begin{vmatrix} 43 & 1 & 6 \\ 35 & 7 & 4 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 3 & 9 & 8 \\ 8 & 10 & 12 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 6 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 9 \\ 8 & 9 & 7 \end{vmatrix}$

(v) $\begin{vmatrix} 72 & 74 & 68 \\ 73 & 75 & 71 \\ 70 & 69 & 70 \end{vmatrix}$ (vi) $\begin{vmatrix} 10 & 275 & 111 \\ 10 & 277 & 110 \\ 10 & 272 & 113 \end{vmatrix}$ (vii) $\begin{vmatrix} 265 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix}$

٢. عين قيم المتحول x في كلٍ مما يلي

(i) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 3 & -2 & 7 \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix} = -1$ (ii) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$ (iii) $\begin{vmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 5 & x & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(iv) $\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$ (v) $\begin{vmatrix} x+2 & 1 & -3 \\ 1 & x-3 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$